

ТЕРБЕЛІСТЕР МЕН ТОЛҚЫНДАР

Негізгі заңдар мен формулалар

1.1.1 ψ физикалық шамасының гармониялық тербелістерінің теңдеуі

немесе

$$\psi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\psi = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

1.1.2 Тербелістің циклдік жиілігі

$$\omega = 2\pi\nu \quad \text{немесе} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

1.1.3 Гармониялық тербелістің периоды:

а) серіппелі маятник үшін

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

б) математикалық маятник үшін

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

в) маятниктің ауырлық центрінен a қашықтықта орналасқан тербеліс өсіне қатысты инерция моменті I тең физикалық маятник үшін

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$$

г) тербелмелі контур үшін

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

1.1.4 Гармониялық тербелістің толық энергиясы:

а) материялық нүкте үшін

$$W = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2$$

б) тербелмелі контур үшін

$$W = \frac{1}{2}LA^2\omega_0^2$$

1.1.5 Өшу коэффициенті:

а) кедергі коэффициенті r тең орта үшін (механикалық тербелістерде)

$$\beta = r/2m$$

б) электромагниттік тербелістер үшін

$$\beta = R/2L$$

1.1.6 Өшпелі тербелістердің циклдік жиілігі

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

1.1.7 Өшпелі тербелістердің теңдеуі

$$\psi = \psi_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

1.1.8 Өшпелі тербелістердің амплитудасы

$$A = \Psi_0 e^{-\beta t}$$

1.1.9 Өшудің логарифмдік декременті

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

1.1.10 Айнымалы ток тізбегінің кедергісі:

а) индуктивті

$$X_L = L\omega$$

б) сыйымдылық

$$X_C = 1/C\omega$$

в) реактив

$$X = L\omega - 1/C\omega$$

г) толық (импеданс)

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

1.1.11 Ток күшінің әсерлік мәні (эффeктивті)

$$I_{\text{эф}} = I_o / \sqrt{2}$$

1.1.12 Кернеудің әсерлік мәні (эффeктивті)

$$U_{\text{эф}} = U_o / \sqrt{2}$$

1.1.13 Айнымалы ток тізбегі үшін Ом заңы

$$I_{\text{эф}} = U_{\text{эф}} / \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

1.1.14 Жазық гармониялық толқын теңдеуі

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A \cos \omega(t - \frac{x}{v}) \\ \text{немесе} \quad \xi(x, t) &= A \cos(\omega t - kx) \end{aligned}$$

1.1.15 Толқындық сан

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{немесе} \quad k = \frac{\omega}{v}$$

1.1.16 Толқын ұзындығы

$$\lambda = vT \quad \text{немесе} \quad \lambda = v/\nu$$

1.1.17 Электр өтімділігі ε және магнит өтімділігі μ ортадағы электромагниттік толқындардың жылдамдығы

$$v = c / \sqrt{\varepsilon\mu}$$

1.1.18 Электромагниттік толқындардың E электр және H магнит өрістерінің кернеуліктері арасындағы байланыс

$$\varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2$$

Есеп шығару үлгісі

1 есеп. Массасы 20г математикалық маятник амплитудасы 5см тең тербеліс жасайды. Маятниктің максимал жылдамдығы 15,7 см/с тең. Тербелістің сызықтық жиілігін, периодын және циклдік жиілігін, жіптің ұзындығын, толық энергия мен маятниктің максимал үдеуін анықтаңыздар.

Берілгені:

$$m = 20 \text{ г} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$$

$$A = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$$

$$v_{\max} = 15,7 \text{ см/с} = 15,7 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$$

Шешу: Маятниктің гармониялық тербелістерінің теңдеуі мына түрге ие:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$v - ? \quad T - ? \quad \omega - ? \quad l - ? \quad W - ? \quad a_{\max} - ?$$

мұндағы x – маятниктің тыныштық қалпынан ығысуы; A – тербелістің амплитудасы; ω – циклдік жиілік; φ_0 – тербелістің бастапқы фазасы

Маятник тербелісінің жылдамдығы

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$v = v_{\max}$ болғанда $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$, сондықтан:

$$v_{\max} = A\omega,$$

осыдан

$$\omega = \frac{v_{\max}}{A} \quad (1.1)$$

$$[\omega] = \frac{m/c}{m} = \frac{1}{c}$$

(1.1) формуласына есептің шартында берілген сандық мәндерді қойып ω есептейміз

$$\omega = 15,7 \cdot 10^{-2} / (5 \cdot 10^{-2}) = 3,14 \text{ с}^{-1}$$

T период пен ν сызықтық жиілікті табамыз:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.2)$$

$$T = \frac{2 \cdot 3,14}{3,14} = 2 \text{ с}; \quad \nu = \frac{1}{2} \text{ с}^{-1} = 0,5 \text{ Гц}.$$

Маятниктің ұзындығын математикалық маятниктің периодын анықтау формуласы арқылы табамыз

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

осыдан

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}, \quad (1.3)$$

мұндағы g -еркін түсу үдеуі.

(1.3) формуласындағы өлшем бірліктерді тексеріп, есептеулер жүргіземіз:

$$[l] = \text{с}^2 \cdot \text{м} / \text{с}^2 = \text{м}$$

$$l = \frac{2^2 \cdot 9,8}{4 \cdot 3,14^2} \approx 1 \text{ м}$$

Маятниктің толық энергиясы мына формула бойынша анықталады:

$$W = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \quad (1.4)$$

$$[W] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot (\text{с}^{-1})^2 = \text{Дж}$$

(1.4) формуласы бойынша есептеулер жүргіземіз:

$$W = 2 \cdot 10^{-2} (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 3,14^2 / 2 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Маятниктің үдеуі

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$a = a_{\max}$ болғанда $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$, сондықтан

$$|a_{\max}| = A\omega^2 \quad (1.5)$$

(1.5) формуласы бойынша a_{\max} өлшем бірлігін тексереміз:

$$[a] = \text{м} \cdot \frac{1}{\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

(1.5) формуласына сандық мәндерін қойып, есептеулер жүргіземіз

$$a_{\max} = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 3,14^2 \approx 0,5 \text{ м/с}^2$$

Жауабы: $\nu = 0,5$ Гц; $T = 2$; $\omega = 3,14 \text{ с}^{-1}$; $l \approx 1 \text{ м}$; $W = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$; $a_{\max} \approx 0,5 \text{ м/с}^2$.

2 есеп. Массасы $m=0,01\text{кг}$ бөлшек периоды $T=2\text{с}$ тең гармониялық тербелістер жасайды. Тебелмелі нүктенің толық энергиясы $W=0,1\text{мДж}$. Тербеліс амплитудасын және бөлшекке әсер ететін F_{max} күштің максимал мәнін анықтаңыздар.

Берілгені:

$$m = 0,01\text{кг}$$

$$T = 2\text{с}$$

$$W = 0,1\text{мДж} = 0,1 \cdot 10^{-3}\text{Дж}$$

$$A - ? \quad F_{\text{max}} - ?$$

Шешуі: Тербелістің амплитудасын анықтау үшін бөлшектің толық энергиясын табу өрнегін пайдаланамыз:

$$W = \frac{1}{2}mA^2\omega^2,$$

мұндағы $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Осыдан тербелістің амплитудасы

$$A = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2W}{m}} \quad (1.6)$$

Бөлшек гармониялық тербелістер жасағандықтан, оған әсер ететін күш квазисерпімді болып табылады, сондықтан ол мына қатынас арқылы өрнектеледі

$$F = -kx,$$

мұндағы k – квазисерпімді күштің коэффициенті; x – тербелмелі нүктенің ығысуы.

Максимал күш амплитудаға тең x_{max} максимал ығысу кезінде болады:

$$|F_{\text{max}}| = kA. \quad (1.7)$$

k коэффициентін тербеліс периоды арқылы өрнектейміз:

$$k = m\omega^2 = \frac{m \cdot 4\pi^2}{T^2}. \quad (1.8)$$

k және A мәндерін (1.7) формуласына қойып, мынаны табамыз

$$F_{\text{max}} = 2\pi \frac{\sqrt{2mW}}{T}. \quad (1.9)$$

(1.6) және (1.9) формулалары бойынша A амплитуда мен F_{max} максимал күштің өлшем бірліктерін тексереміз:

$$[A] = \frac{c \cdot \text{Дж}^{1/2}}{\text{кг}^{1/2}} = \frac{c \cdot \text{кг}^{1/2} \cdot \text{м}}{c \cdot \text{кг}^{1/2}} = \text{м}$$

$$[F_{\max}] = \kappa \mathcal{E}^{1/2} \cdot \text{Дж}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1} = \frac{\kappa \mathcal{E}^{1/2} \cdot \kappa \mathcal{E}^{1/2} \cdot \text{М}}{\text{с} \cdot \text{с}} = \frac{\kappa \mathcal{E} \cdot \text{М}}{\text{с}^2} = \text{Н}$$

Табылған өлшем бірліктері анықталған шамаларға сәйкес келеді, сондықтан (1.6) және (1.9) формулалары дұрыс.

(1.6) және (1.9) формулаларына сандық мәндерін қойып, есептеулер жүргіземіз:

$$A = \frac{2}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}} \text{ м} = 0,045 \text{ м} = 45 \text{ мм}$$

$$F_{\max} = 2 \cdot 3,14 \frac{\sqrt{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}}}{2} \text{ Н} = 4,44 \cdot 10^{-3} \text{ Н} = 4,44 \text{ мН}.$$

Жауабы: $A = 45 \text{ мм}$; $F_{\max} = 4,44 \text{ мН}$.

3 есеп. Тербелмелі контурдағы конденсатор астарларының арасындағы потенциалдар айырмасы уақыт өте $U = 100 \sin 1000\pi t$ заңы бойынша өзгереді. Конденсатордың электрлік сыйымдылығы $0,5 \text{ мкФ}$. Контурдың энергиясын, индуктивтілігін, меншікті тербелістерінің периодын және индуктивті катушка арқылы өтетін токтың максимал мәнін анықтаңыздар.

Берілгені:
 $U = 100 \sin 1000\pi t$
 $C = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$

Шешуі: Конденсатордағы кернеу гармониялық заң бойынша өзгереді

$$U = U_0 \sin \omega_0 t, \quad (1.10)$$

T -? L -? W -? I_{\max} -? мұндағы U_0 - конденсатор астарларындағы кернеудің амплитудалық (максимал) мәні; ω_0 – тербелістердің меншікті циклдік жиілігі. Ол периодпен мына қатынас арқылы байланысқан

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.11)$$

(1.10) формуласын есептің шартында берілген U -дың өрнегімен салыстыра отырып, $\omega_0 = 1000\pi$ екенін анықтаймыз. Осыдан

$$T = \frac{2\pi}{1000\pi \text{ с}^{-1}} = 0,002 \text{ с}.$$

Контурдағы меншікті тербелістер периоды Томсон формуласы бойынша анықталады

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

осыдан

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C};$$

$$L = \frac{4 \cdot 10^{-6} \text{ с}^2}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}} = 0,2 \text{ Гн.}$$

Контурдың толық энергиясы W ол $W_э = \frac{CU^2}{2}$ электрлік және $W_м = \frac{LI^2}{2}$ магниттік энергиялар қосындысына тең және конденсатор өрісінің максимал энергиясына тең.

$$W = W_{э\max} = \frac{CU_{\max}^2}{2} \quad (1.12)$$

немесе индуктивті катушка өрісінің максимал энергиясына тең

$$W = W_{м\max} = \frac{LI_{\max}^2}{2}. \quad (1.13)$$

(1.12) формуласы бойынша W анықтаймыз:

$$W = \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2}{2} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 2,5 \text{ мДж.}$$

Толық энергияны біле отырып, индуктивті катушка арқылы өтетін ток күшінің максимал мәнін (1.13) формуласының көмегімен анықтай аламыз:

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{2W}{L}};$$

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}}{0,2}} = 0,15 \text{ А.}$$

Жауабы: $T = 0,002 \text{ с}$, $L = 0,2 \text{ Гн}$, $W = 2,5 \text{ мДж}$, $I_{\max} = 0,15 \text{ А}$.

4 есеп. Ұзындығы $l=1$ м математикалық маятник тербелістерінің амплитудасы $t=10$ мин уақыт аралығында 2 есеге кеміген. Өшудің θ логарифмдік декрементін анықтаңыздар.

Берілгені:

$$l=1\text{ м}$$

$$t=10\text{ мин}=600\text{ с}$$

$$\frac{A_0}{A} = 2$$

θ -?

Шешуі: Өшпелі тербелістердің амплитудасы мына формула бойынша өрнектеледі

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \quad (1.14)$$

мұндағы A_0 - тербелістің бастапқы амплитудасы,
 β - өшу коэффициенті

(1.14) формуласынан мынаны табамыз:

$$\frac{A_0}{A} = e^{\beta t}, \quad \ln \frac{A_0}{A} = \beta t,$$

$$\beta = \frac{\ln \frac{A_0}{A}}{t} \quad (1.15)$$

Өшудің логарифмдік декременті θ мен өшу коэффициенті β мына қатынас арқылы байланысқан:

$$\theta = \beta T, \quad (1.16)$$

мұндағы T -тербеліс периоды. Математикалық маятник үшін

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.17)$$

(1.15) және (1.17) өрнектерін (1.16) формуласына қойып, өшудің логарифмдік декрементін табу үшін соңғы формуланы жазамыз:

$$\theta = \frac{\ln \frac{A_0}{A}}{t} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.18)$$

Сандық мәндерін қойып, есептеулер жүргіземіз:

$$\theta = \frac{\ln 2}{600} \cdot 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{1}{9,8}} = 2,31 \cdot 10^{-3}.$$

Жауабы: $\theta = 2,31 \cdot 10^{-3}$.

5 есеп. Тербелмелі контур индуктивтілігі $L=1,2$ мГн катушка мен электрлік сыйымдылығы $C_1=12$ пФ ден $C_2=80$ пФ дейін айнымалы өзгеретін конденсатордан тұрады. Осы контурда резонанс тудыратын электромагниттік толқындар ұзындығының диапазонын анықтаңыздар. Контурдың актив кедергісін нольге тең деп есептеңіздер.

Берілгені:

$$L=1,2\text{мГн}=1,2\cdot 10^{-3}\text{Гн}$$

$$C_1=12\text{пФ}=12\cdot 10^{-12}\text{Ф}$$

$$C_2=80\text{пФ}=80\cdot 10^{-12}\text{Ф}$$

$$R=0$$

$$\lambda_1-?\lambda_2-?$$

Шешуі: Контурда резонанс тудыра алатын электромагниттік толқындардың ұзындығы контурдағы T тербеліс периодымен мына қатынас арқылы байланысқан:

$$\lambda = cT,$$

мұндағы c - электромагниттік толқындар жылдамдығы.

Тербеліс периоды өз кезегінде катушка L индуктивтілігі мен конденсатордың C электрлік сыйымдылығымен Томсон формуласы арқылы байланысқан:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Сондықтан

$$\lambda = c \cdot 2\pi\sqrt{LC}. \quad (1.19)$$

Есептің шарты бойынша контурдың индуктивтілігі тұрақты, ал контурдың сыйымдылығы C_1 ден C_2 дейін өзгере алады. Электрлік сыйымдылығының осы мәндеріне резонанс тудыра алатын толқын ұзындығының диапазонын анықтайтын λ_1 және λ_2 толқын ұзындықтары сәйкес келеді:

$$\lambda_1 = c \cdot 2\pi\sqrt{LC_1}; \quad \lambda_2 = c \cdot 2\pi\sqrt{LC_2}. \quad (1.20)$$

(1.19) формуласына сәйкес λ толқын ұзындығының өлшем бірлігін тексереміз:

$$[\lambda] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Гн}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{Ф}^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \left(\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\text{Кл}}{\text{В}}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{м}$$

(1.20) формуласына сандық мәндерін қойып есептеулер жүргіземіз:

$$\lambda_1 = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-12}} = 226 \text{ м.}$$

$$\lambda_2 = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 10^{-12}} = 585 \text{ м.}$$

Жауабы: $\lambda_1 = 226$ м, $\lambda_2 = 585$ м.

6 есеп. Жазық электромагниттік толқын ортада ($\varepsilon = 9$) тарала отырып, $H = 2 \cos 2\pi (2 \cdot 10^7 t - 0,2x)$ теңдеуімен өрнектеледі. Тербеліс периоды мен жиілігін, толқын ұзындығын және оның таралу жылдамдығын, ортаның магниттік өтімділігін анықтаңыздар.

Берілгені:

$$\varepsilon = 9$$

$$H = 2 \cos 2\pi (2 \cdot 10^7 t - 0,2x)$$

$$T - ? \quad \lambda - ? \quad \nu - ? \quad \mu - ? \quad v - ?$$

Шешуі: Жазық электромагниттік толқын теңдеуінің жалпы түрі:

$$H = H_m \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad (1.21)$$

мұндағы H_m – магнит өрісі кернеулігі векторының тербеліс амплитудасы; T – тербеліс периоды; λ – толқын ұзындығы; t – уақыт; x – координата. (1.21) теңдеуін есептің шартында берілген теңдеумен салыстыра отырып, мынаны табамыз:

$$\frac{1}{T} = 2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}, \quad \frac{1}{\lambda} = 0,2 \text{ м}^{-1},$$

осыдан:

$$T = \frac{1}{2 \cdot 10^7} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ с}; \quad \lambda = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ м}.$$

Толқын ұзындығы, жиілік, период және толқынның жылдамдығы мына қатынастар арқылы байланысқан:

$$\nu = \frac{\lambda}{T}; \quad v = \frac{1}{T}$$

Сондықтан

$$\nu = 5 / (5 \cdot 10^{-8}) = 10^8 \text{ м/с}; \quad v = 1 / (5 \cdot 10^{-8}) = 2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Электромагниттік толқындар жыламдығы ортаны сипаттайтын ε және μ шамаларымен мына қатынас арқылы байланысқан

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (1.22)$$

мұндағы ε және μ – ортаның электр және магнит өтімділіктері; c – вакуумдағы жарық жылдамдығы. (1.22) формуласынан мынаны табамыз

$$\mu = \frac{c^2}{\varepsilon v^2}.$$

$$\mu = \frac{(3 \cdot 10^8)^2}{9 \cdot (10^8)^2} = 1$$

Жауабы: $T = 5 \cdot 10^{-8} \text{ с}; \quad \lambda = 5 \text{ м}; \quad \nu = 10^8 \text{ м/с}; \quad v = 2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}; \quad \mu = 1.$

